

无拉力双地基参数板在移动荷载作用下的动力响应

刘俊卿, 曹书文, 孙 莹, 王 炜

(西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055)

摘 要: 求解了无拉力双参数地基上厚、薄板受任意移动荷载作用下的动力响应问题和板的脱离问题。从板-地基接触系统的分区广义势能泛函出发, 通过建立和分析板单元区、地基单元区和连接板-地基的接触单元区的势能泛函, 给出求解无拉力双参数地基板受任意移动荷载作用下的动力响应问题的分区广义协调元法。利用纽马克 (Newmark) 法经 MATLAB 编程叠代数值计算, 验证了文中方法分析无拉力双参数地基板的动力响应问题是有效的。

关 键 词: 无拉力; 双参数地基; 接触单元; 广义协调元; 动力响应; 移动荷载

中文分类号: TU 311

文献标识码: A

Dynamic response problem about plate on tension-free double parameter foundation with moving load

LIU Jun-qing, CAO Shu-wen, SUN Ying, WANG Wei

(School of Science, Xi'an University of Arch. & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: A dynamic response problem about thick-thin plate on tension-free double parameter foundation with random moving loads and problem about plate untouched foundation have been solved. From the generalized potential energy functional analysis of subsea of system about plate-foundation touching beginning, we can get subsea generalized harmonious element about solving dynamic response problem of plate on tension-free double parameter foundation with random moving loads through building and analyzing potential energy functional analysis of section about plate element, section of foundation element and section of plate-foundation element. We use method of Newmark and programme with MATLAB through iterativeness and get dynamic response value of every point in midst plane about moving loads in different instantaneous, different place. We also get the region and area of plate untouched foundation. Through numerical calculation, we can verify the method proposed, with which analyzing dynamic response problem about thick-thin plate on tension-free double parameter foundation, is effective.

Key words: tension-free; double parameter foundation; touch element; generalized harmonious element; dynamic response; moving load

1 前 言

随着交通运输的发展, 公路、机场跑道和停机坪等的混凝土板厚不断增大, 若仍沿用传统的弹性地基上薄板元进行分析, 是欠妥当的。分析地基板或路面板时, 常用的理想化土介质的弹性模型有单参数的 Winkler 模型、双参数模型和弹性半空间模型。Winkler 模型与弹性半空间模型是两种极理想的情况; 双参数模型是在 Winkler 模型的基础上为克服其在连续性态上所固有的缺陷而提出的, 而且能较准确地反映板-地基相互作用, 应用比较广泛。

由于地基不能承受板边缘可能翘起产生的拉应力, 对某些问题诸如中心受局部荷载的自由板分析其力学性能就不能简单地按照双参数地基来进行处理。本文以广义协调理论为基础, 从板-地基接触系统的分区广义势能泛函出发, 建立了求解板-地基动力相互作用问题的基本理论。

2 理论基础

整体的动力平衡方程^[1]为

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (1)$$

式中, 位移 u 是时间 t 的函数; $\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$ 为速度和加速度矢量; M 、 C 、 K 分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; F 为动力矢量。

2.1 刚度矩阵形成

假设板与地基之间的间隙将板和地基连接成为一个由不同介质组成的连续系统, Ω 系统可分为 3 个区: 板区域 Ω_b , 地基区 Ω_f 和连接板-地基的区域 Ω_c , 即

$$\Omega = \Omega_b + \Omega_f + \Omega_c \quad (2)$$

离散整体系统, (1) 将 Ω_b 划分为板单元 b 网格; (2) 与板区的结点及网格划分相对应, 将 Ω_f 表面离散为地基附加刚度面单元 f 网格; (3) 相对应的板单元 b 表面和地基附加刚度面单元 f 面构成的接触单元 c 将区域 Ω_c 分割成了离散的单元, 系统单元体用 e 表示。

建立系统包含位移和边界力两类变量的分区广义势能泛函 Π_{2p} 并表示为各区广义势能泛函之和^[1]。

$$\Pi_{2p} = \Pi_b + \Pi_f + \Pi_c = \sum_{e=1}^m \Pi_{2p}^e \quad (3)$$

式中, Π_b, Π_f, Π_c 分别为 Ω_b 、 Ω_f 和可能接触区域 Ω_c 的分区广义势能泛函; Π_{2p}^e 为单元分区的广义势能泛函; m 为单元总数。泛函 Π_b 、 Π_f 、 Π_c 也可以表达为对应区域的单元分区广义势能泛函之和。

在建立各个单元分区的广义势能泛函的退化形式后, 对系统泛函 Π_{2p} 式 (3) 变分, 即能建立系统平衡方程:

$$\begin{aligned} \Pi_{2p} = & \sum_{b=1}^{m/3} \left\{ \iint_{A_b} \frac{D}{2} [k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y + 2(1-\mu)k_{xy}^2] dA + \right. \\ & \left. \iint_A \frac{C}{2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) dA - \iint_{A_b} (\bar{m}_x \psi_x + \bar{m}_y \psi_y + \bar{q}w) dA + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^{m/3} \iint_A \frac{1}{2} \left(k_i w^2 + \frac{\partial w}{\partial x} Q_x + \frac{\partial w}{\partial y} Q_y \right) dx dy + \right. \\ & \left. \sum_{c=1}^{m/3} \iint_A \frac{1}{2} [E_n (w_1 - w_2)^2 + [E_s (u_1 - u_2)^2 + [E_s (v_1 - v_2)^2] dA \right. \end{aligned} \quad (4)$$

式中各符号意义见文[3]。据式 (4), 板-地基利用 FZC11^[1] 单元, 板利用 LFR1^[2] 单元再加上双参数地基附加刚度面单元, 导出系统单元刚度矩阵^[3]为

$$[k]^e = [k_b]^e + [k_s]^e + [k_f]^e + [k_c]^e \quad (5)$$

其中板弯曲单元刚度阵为

$$[k_b]^e = \iint_{A_b} [B_b]^T [D_b] [B_b] dx dy \quad (6)$$

板剪切单元刚度阵为

$$[k_s]^e = \iint_{A_b} [B_s]^T [D_s] [B_s] dx dy \quad (7)$$

双参数地基附加单元刚度阵^[5]为

$$[k_f]^e = \iint_{A_f} \left\{ \left[\frac{\partial N^0}{\partial x} + \frac{\partial N_w^*}{\partial x} \right]^T G_p \left[\frac{\partial N^0}{\partial x} + \frac{\partial N_w^*}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial N^0}{\partial y} + \frac{\partial N_w^*}{\partial y} \right]^T G_p \left[\frac{\partial N^0}{\partial y} + \frac{\partial N_w^*}{\partial y} \right] \right\} dx dy \quad (8)$$

接触单元刚度阵为

$$[k_c]^e = \iint_{A_c} [N^c]^T [D_c] [N^c] dA \quad (9)$$

单元刚度矩阵计算后可集成系统总刚度矩阵:

$$K = \sum_e k^e \quad (10)$$

2.2 质量矩阵、阻尼矩阵的形成^[2]

单元一致质量矩阵:

$$m = \int_V \bar{N}^T \rho \bar{N} dV = \rho h \int_s (G^T H G + N^T N) dx dy \quad (11)$$

横截面的转动时的质量矩阵一般可以略去。

$$m = \int_V \bar{N}^T \rho \bar{N} dV = \rho h \int_s N^T N dx dy \quad (12)$$

整体质量矩阵可由单元一致质量矩阵集成:

$$M = \sum_e m^e \quad (13)$$

单元阻尼矩阵:

$$c = \int_V N^T \mu N dV = \mu h \int_s N^T N dx dy \quad (14)$$

整体阻尼矩阵可由单元阻尼矩阵集成:

$$C = \sum_e c^e \quad (15)$$

3 无拉力双参数地基板动力响应分析计算

3.1 特征值问题

动力学方程式 (1) 的特征方程为

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (16)$$

利用上述方程可解出特征值。

3.2 纽马克(Newmark)法分析动力响应

纽马克法的递推关系为

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u}_{t+\Delta t} + C \dot{u}_{t+\Delta t} + K u_{t+\Delta t} &= F_{t+\Delta t}; \\ \dot{u}_{t+\Delta t} &= \dot{u}_t + (1-\gamma) \ddot{u}_t \Delta t + \gamma \ddot{u}_{t+\Delta t} \Delta t; \\ u_{t+\Delta t} &= u_t + \dot{u}_t \Delta t + \frac{1-2\beta}{2} \ddot{u}_t \Delta t^2 + \beta \ddot{u}_{t+\Delta t} \Delta t^2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

参数 γ 、 β 的选择对算法影响很大, 当 $\gamma \geq$

0.5, $\beta \geq 0.25(0.5 + \gamma)^2$ 时, 纽马克法是无条件稳定的, 计算步骤可简要表述如下:

(1) 初始计算

①形成总体刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 、质量矩阵 $\mathbf{M}$ 和阻尼矩阵 $\mathbf{C}$;

②确定初始时刻的状态矢量 $\mathbf{u}_0$ 、 $\dot{\mathbf{u}}_0$ 并由式 (1) 求出 $\ddot{\mathbf{u}}_0$;

③选择步长 Δt 以及参数 γ 、 β 并计算下列常数: $\alpha_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}$, $\alpha_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$, $\alpha_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1$, $\alpha_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right)$, $\alpha_6 = \Delta t(1 - \gamma)$, $\alpha_7 = \gamma \Delta t$ 。

④形成处理刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C}$;

⑤分解矩阵 $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$ 。

(2) 对每个时间步的计算

①计算 $t + \Delta t$ 时刻的“荷载”矢量

$$\bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(\alpha_0 \mathbf{u}_t + \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}_t + \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C}(\alpha_4 \mathbf{u}_t + \alpha_5 \dot{\mathbf{u}}_t + \alpha_6 \ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (18)$$

②求 $t + \Delta t$ 时刻的位移矢量

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t}, \mathbf{LDL}^T \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} \quad (19)$$

③计算 $t + \Delta t$ 时刻的加速度、速度矢量

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \alpha_0 (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t - \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}_t - \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}_t); \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t + \alpha_6 \ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha_7 \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

循环上述步骤可求出其动力响应。

3.3 移动荷载处理

3.3.1 常力 P 以匀速 v 在板上沿平行板边直线移动

设荷载 P 沿 x 轴 ($y = y_1$) 以匀速 v 运动, 则

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= P \delta(x - vt) H(t) \delta(y_1); \\ H(t - t_0) &= \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

3.3.2 波动荷载, 动载在板面上移动且大小按简谐规律变化

设荷载 $P(t)$ 大小按简谐规律变化沿 x 轴 ($y = y_1$) 以匀速 v 运动, 即

$$P(t) = P_0 \sin \omega_p t \quad (22)$$

$$F(t) = P_0 \sin \omega_p t \delta(x - vt) H(t) \delta(y_1) \quad (23)$$

(3) 车辆车轮荷载作用

$$F(t) = M[g - \ddot{w}] \delta(x - vt) H(t) \delta(y_1) \quad (24)$$

3.4 计算流程

利用纽马克法的递推关系计算动力响应值, 第一次施加荷载, 假定板与地基处于完全接触状态, 随后判断板单元的上翘结点, 并置包含此节点的接

触单元参数 $En = 0$ 。允许其与对应的地基表面节点能不受约束相对移动, 计算第二次近似值, 重复上述过程, 至所有的接触单元节点位移前后两次迭代数值差非常小时得到收敛结果和脱离区面积。处于接触状态时赋参数 $En = \alpha k_f$, α 为给定经验系数。每瞬时重复上述过程即可得出动力响应。

3.5 算例

放置在双参数地基上的正方形板上受移动荷载作用, 已知板边长 $a = 20$ m, 板厚 $h = 0.6$ m, 板的弹性模量 $E = 29.4$ GPa, $\mu = 0.15$, 阻尼系数 $C = 0.4$, 板重度 $\gamma = 78$ kN/m³, 地基弹性系数 $k = 49$ MPa, 地基剪切基床系数 $G_p = 4.9$ MPa。①移动荷载 $P = 10$ kN, 匀速 $v = 10.0$ m/s (36 km/h), 离边距离 $y_1 = 10$ m。②移动荷载 $P_0 = 10$ kN, 匀速 $v = 10.0$ m/s, 频率 $\omega_p = 2.222$ rad/s, 离边距离 $y_1 = 10$ m。计算板的固有频率值见表 1。

表 1 板的固有频率
Table 1 Natural frequencies of plates

(Hz)					
1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶
78.360 5	52.821 6	52.821 6	-11.125 8	-11.125 8	42.311 6

当板中点受集中静力 $P = 10$ kN 作用时板中面挠度 w 值见表 2。当移动荷载 $P = 10$ kN, 匀速 $v = 10.0$ m/s, $y_1 = 10$ m 时的动力响应值见表 3。当移动荷载 $P_0 = 10$ kN, 匀速 $v = 10.0$ m/s, 频率 $\omega_p = 2.222$ rad/s, 离边距离 $y_1 = 10$ m 时的动力响应值见表 4。

用 MATLAB 编程通过迭代计算, 板中面动挠度结果见表 2~4。表 2 为不考虑地基接触时的结果, 与文[6]中的 $w_{\max} = 0.001 62$ m 结果较为吻合。当 $h = 0.02$ m 时板的脱离区面积为 1.52 m², 从算例可见板与地基的脱离程度与荷载和板厚有关。

表 2 1/4 板中面挠度
Table 2 The values of middle plane of the quarter plate's deflection w

y/x	0	$a/10$	$a/5$	$3a/10$	$2a/5$	$a/2$
0	-1.592 188	-1.594 476	-1.597 029	-1.599 537	-1.601 494	-1.602 256
$a/10$	-1.592 265	-1.594 611	-1.597 212	-1.599 82	-1.601 902	-1.602 728
$a/5$	-1.592 552	-1.594 961	-1.597 746	-1.600 657	-1.603 145	-1.604 192
$3a/10$	-1.592 960	-1.595 501	-1.598 576	-1.602 011	-1.605 303	-1.606 825
$2a/5$	-1.593 351	-1.596 026	-1.599 482	-1.603 727	-1.608 674	-1.611 309
$a/2$	-1.593 505	-1.596 252	-1.599 908	-1.604 642	-1.610 724	-1.614 15

注: a 为板长。 w 为 (10^{-3} m), 挠度条件: $h = 0.6$ m, E_n 、 E_{s1} 、 E_{s2} 均为 0。

表 3 板中面挠度时的计算结果
Table 3 Flexibility of plate middle plane

(x,y) / m	0.1 s	0.2 s	0.3 s	0.4 s	0.5 s	0.6 s	0.7 s
0,10	4×10^{-6}	1×10^{-5}	-1.6×10^{-4}	0.001 97	-0.024 8	0.223 6	-0.287
2,10	-4×10^{-6}	-1×10^{-6}	1.15×10^{-4}	-15.5×10^{-4}	0.017 7	-0.087	-1.66
4,10	4×10^{-6}	0.0	-1.24×10^{-4}	0.001 7	-0.019	0.078	2.1
6,10	-5×10^{-6}	3×10^{-6}	9.5×10^{-5}	-0.001 4	0.015 9	-0.001 9	-3.08
8,10	5×10^{-6}	-9×10^{-6}	-0.67×10^{-4}	9.79×10^{-4}	-0.01	-0.095	4.06
10,10	-4×10^{-6}	1.6×10^{-5}	4×10^{-5}	-5.5×10^{-4}	0.005 6	0.183	-5.11
12,10	3×10^{-6}	-2.6×10^{-5}	0.28×10^{-4}	-5.48×10^{-4}	0.006 3	-0.34	6.23
14,10	-2×10^{-6}	3×10^{-5}	-6×10^{-5}	0.000 9	-0.012 6	0.395	-6.71
16,10	1×10^{-6}	-3.8×10^{-5}	1.43×10^{-4}	-0.001 8	0.024 6	-0.507	7.279
18,10	0.0	2.7×10^{-5}	-1.33×10^{-4}	0.001 1	-0.020 7	0.368 9	-5.583
20,10	-1×10^{-6}	-3.1×10^{-5}	1.77×10^{-4}	-1.52×10^{-4}	0.026 9	-0.435 2	6.093

注: $w(\times 10^{-3} \text{ m})$, $h = 0.6 \text{ m}$, E_n 、 E_{s1} 、 E_{s2} 不为 0, $P=10 \text{ kN}$, $V=10 \text{ m/s}$ 。

表 4 板中面挠度 $w(10^{-3} \text{ m})$
Table 4 Flexibility of plate middle plane $w(10^{-3} \text{ m})$

(x,y) / m	0 s	0.1 s	0.2 s	0.3 s	0.4 s	0.5 s	0.6 s	0.7 s	0.8 s
0,a/2	0	0	1×10^{-6}	-1.5×10^{-5}	1.3×10^{-4}	-1.63×10^{-3}	23.55×10^{-3}	-0.303 1	-0.328 39
a/10,a/2	0	-1×10^{-6}	0	1.4×10^{-5}	-1.48×10^{-4}	1.86×10^{-3}	-22.2×10^{-3}	0.191 61	0.228 25
a/5,a/2	0	1×10^{-6}	0	-1.5×10^{-5}	1.75×10^{-4}	-2.18×10^{-3}	25.34×10^{-3}	-0.211 9	-0.701 5
3a/10,a/2	0	-1×10^{-6}	0	1.3×10^{-5}	-1.7×10^{-4}	2.32×10^{-3}	-23.8×10^{-3}	0.154 3	0.579 4
2a/5,a/2	0	-1×10^{-6}	0	-1.3×10^{-5}	1.64×10^{-4}	-2.4×10^{-3}	20.48×10^{-3}	-0.078 4	-0.885 9
a/2,a/2	0	-1×10^{-6}	1×10^{-6}	1.2×10^{-5}	-1.5×10^{-4}	2.454×10^{-3}	17.88×10^{-3}	-0.002	0.742 7
3a/5,a/2	0	1×10^{-6}	-2×10^{-6}	-9×10^{-6}	0.94×10^{-4}	-2.1×10^{-3}	7.603×10^{-3}	0.169 776	-0.468 84
7a/10,a/2	0	0	3×10^{-6}	6×10^{-6}	-7.7×10^{-5}	1.789×10^{-3}	-4.375×10^{-3}	-0.250	0.294 18
4a/5,a/2	0	0	-3×10^{-6}	-1×10^{-5}	2.9×10^{-5}	-1.116×10^{-3}	-4.899×10^{-3}	0.403 084	0.036 58
A,a/2	0	0	3×10^{-6}	-2×10^{-6}	-4.3×10^{-5}	0.584×10^{-3}	2.02×10^{-3}	-0.322	-0.083 98

注: $P=10 \text{ kN}$, $V=10 \text{ m/s}$, $\omega_p = 2.222 \text{ rad/s}$, $h = 0.6 \text{ m}$ 时的计算结果。

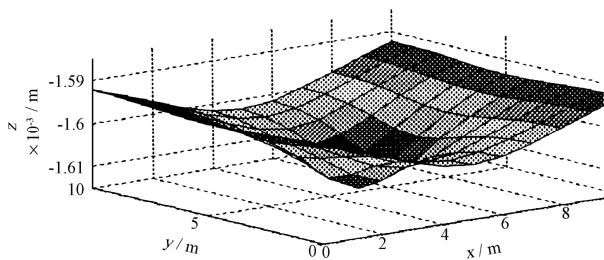


图 1 E_n 、 E_{s1} 、 E_{s2} 均为 0, $h=0.6 \text{ m}$
Fig.1 E_n 、 E_{s1} 、 E_{s2} all equal zero and $h=0.6 \text{ m}$

4 结 论

本文利用有限单元法将双参数地基板系统分为板、地基和连接板与地基的接触区域等三部分对应离散成板单元、地基附加刚度面单元和接触单元网格,经理论推导和数值计算结果表明,该方法具有通用性,适合于无拉力双参数地基上板动力响应问

题的求解。

参 考 文 献

- [1] 邹佑学, 匡文起, 龙驭球, 等. 无拉力 Winkler 地基上板弯曲问题求解的广义协调元法[J]. 清华大学学报, 2002, 42(8): 1 132—1 138.
- [2] 龙志飞. 完全无闭锁的厚板矩形单元[J]. 工程力学, 1992, 9(1): 88—93.
- [3] 刘俊卿, 李雪宁. 无拉力双参数地基上矩形薄板的弯曲[J]. 西安建筑科技大学学报, 2004, 36 (4): 460—465.
- [4] 赵俊卿. 有限元分析中的广义协调元方法[D]. 北京: 清华大学, 1989.
- [5] 杨耀文, 刘正兴. 三维弹性接触问题的接触面单元法[J]. 力学学报, 1996, 28(5): 613—619.
- [6] 孙卫明, 杨光松, 张承宗. 双参数地基上弹性厚板弯曲的一般解析解[J]. 工程力学, 1999, 4(2): 71—78.